المجــال: التطورات الرتيبة

الوحدة الخامسة: تطور جمـلـة ميكانيـــكية

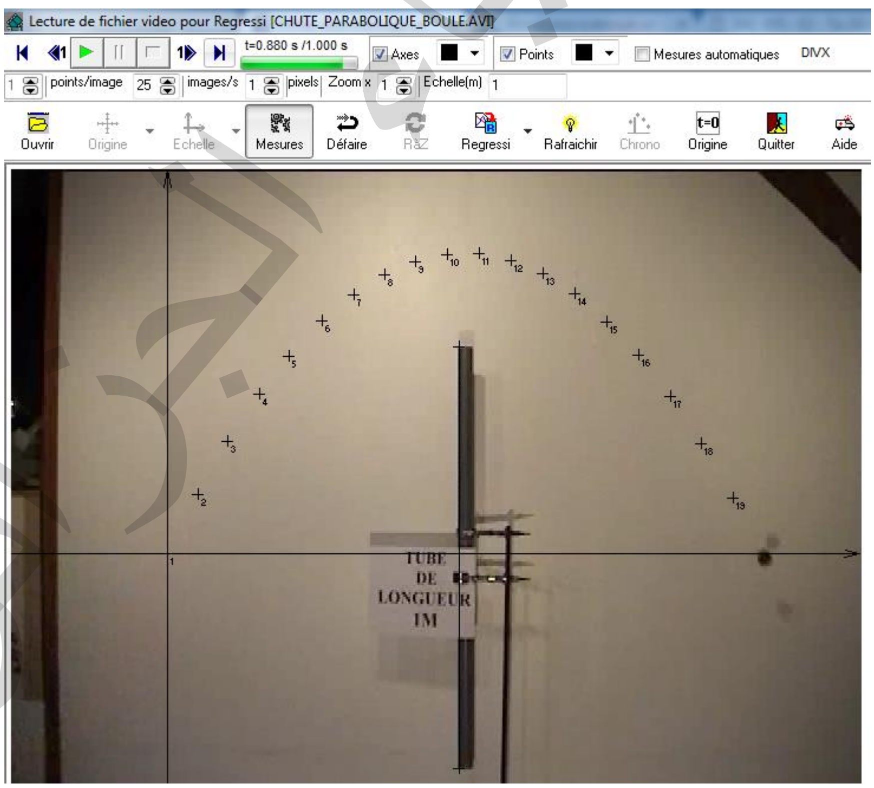
المدة: 6 سا	الموضوع: تطبيقات القانون الثاني لنيوتن

1. حركة القذيفة في حقل الجاذبية المنتظم:

نشاط:

لتحقيق هذا النشاط نستعمل شريط فيديو مصور لحركة قذيفة (كرة كتلتها $m = 45\text{g}$). ثم نقوم بمعالجة الشريط بواسطة برنامج إعلام آلي مثل regavi فنتحصل على النتائج التالية:

t	x	y	vx	vy	v	ax	ay	a
s	m	m	m.s⁻¹	m.s⁻¹	m.s⁻¹	mm.s⁻²	m.s⁻²	m.s⁻²
0	0	0	1.807	3.754	4.167	-315.2	-10.41	10.41
0.04	0.07283	0.1401	1.807	3.344	3.801	35.02	-10.14	10.14
0.08	0.1429	0.2661	1.807	2.934	3.446	385.2	-9.871	9.879
0.12	0.2185	0.3782	1.835	2.563	3.152	472.7	-9.736	9.748
0.16	0.2885	0.4678	1.87	2.171	2.865	402.7	-9.664	9.672
0.2	0.3669	0.5518	1.87	1.779	2.581	70.02	-9.856	9.857
0.24	0.4426	0.6134	1.87	1.394	2.332	-122.5	-9.804	9.805
0.28	0.5154	0.6611	1.849	0.9804	2.093	0.00625	-9.769	9.769
0.32	0.5882	0.6919	1.856	0.6092	1.953	175.1	-9.751	9.753
0.36	0.6639	0.7087	1.877	0.2171	1.889	297.6	-9.769	9.773
0.4	0.7395	0.7115	1.891	-0.1751	1.899	210.1	-10.08	10.09
0.44	0.8151	0.6947	1.891	-0.5812	1.978	70.18	-10.21	10.21
0.48	0.8908	0.6639	1.891	-1.008	2.143	0.175	-10.29	10.29
0.52	0.9664	0.6162	1.891	-1.408	2.357	-69.94	-10.22	10.22
0.56	1.042	0.549	1.891	-1.821	2.625	-140.1	-10.05	10.05
0.6	1.118	0.4706	1.877	-2.22	2.907	-207.7	-10.05	10.05
0.64	1.193	0.3725	1.87	-2.612	3.212	-247.7	-10.06	10.07
0.68	1.266	0.2605	1.86	-3.022	3.549	-229.7	-10.21	10.21
0.72	1.342	0.1317	1.85	-3.432	3.899	-211.7	-10.35	10.35



1. بالاعتماد على برنامج Regressi مثل المنحنيات البيانية التالية: $a_y(t), a_x(t), v_y(t), v_x(t), x(t), y(x)$

2. اعتمادا على المنحنيات المشاهدة في البرنامج:

أ- اكتب عبارتي شعاع موضع مركز عطالة الجسم $\overrightarrow{OG}$ وشعاع سرعته عند اللحظة $t = 0s$.

ب- أوجد قيمة زاوية القذف.

ج- ما هي طبيعة الحركة بالنسبة لكل محور؟

3. أكتب معادلة كل من v_x و v_y.

4. أوجد معادلة المسار.

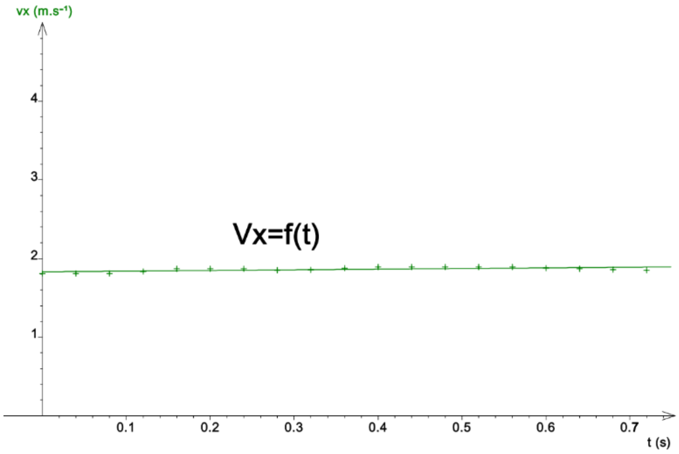
5. باعتبار الجملة هي (القذيفة + الأرض):

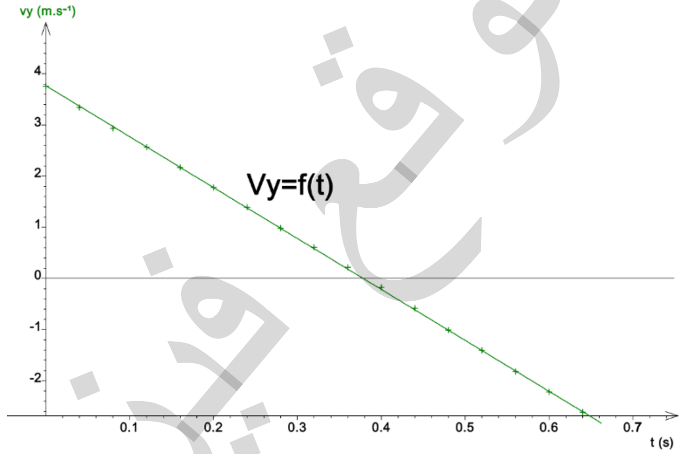
أ- أعط عبارة كل من E_C، E_{PP}، E(الطاقة الكلية).

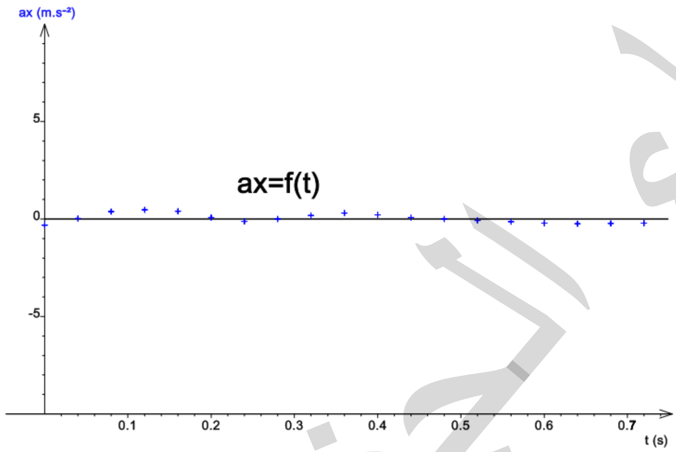
ب- ارسم في نفس المعلم المخططات $E_C = f_1(t)$، $E_{PP} = f_2(t)$، $E = f_3(t)$.

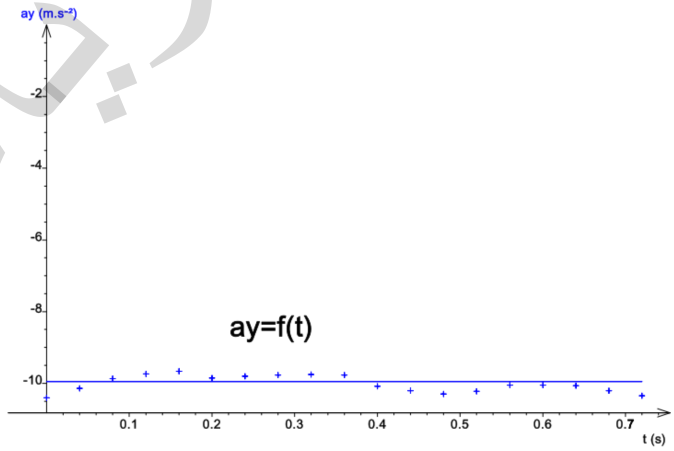
تحليل النشاط:

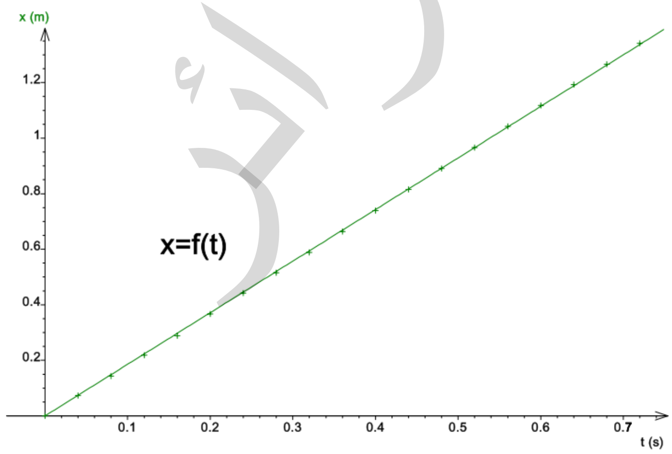
1. تمثيل المنحنيات البيانية:

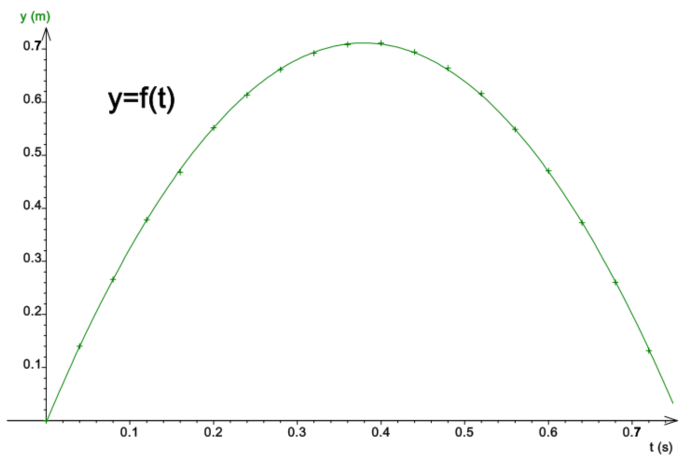


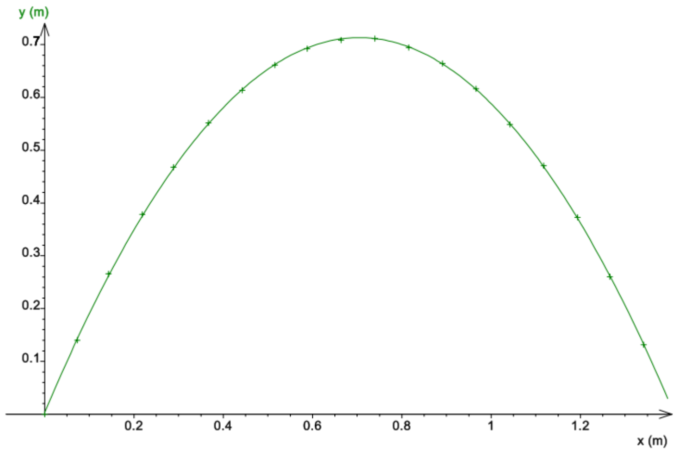


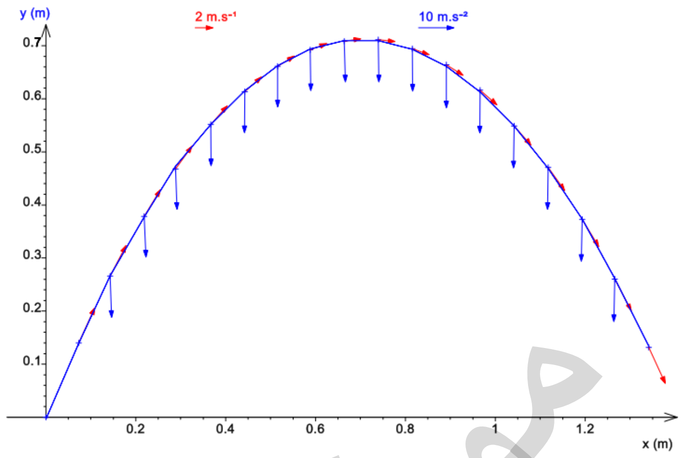












2. أ- عبارة شعاع موضع مركز عطالة الجسم:

- شعاع الموضع:

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = 0.\vec{\imath} + 0.\vec{\jmath}}$$

- شعاع السرعة:

$$\boxed{\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,.\vec{\imath} + v_0 \sin\alpha\,.\vec{\jmath}}$$

ب- إيجاد قيمة زاوية القذف:

$$\tan\alpha = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \frac{2{,}703}{1{,}973} = 1{,}37 \;\Rightarrow\; \boxed{\boxed{\alpha \approx 60°}}$$

ج- طبيعة الحركة بالنسبة لكل محور:

- من المنحنى $v_x(t)$: الحركة منتظمة لأن $v_x = C^{ste}$.
- من المنحنى $v_y(t)$: الحركة متغيرة بانتظام لأن ميل المنحنى $v_y(t)$ ثابت.

3. كتابة معادلة كل من $v_x(t)$ ،$v_y(t)$:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة المنسوبة حركتها إلى معلم سطحي أرضي نعتبره غاليليا. (نعتبر دافعة أرخميدس ومقاومة الهواء مهملتان).

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a}$$
$$\Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}$$
$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{a} \dots.(*)$$

بعد الإسقاط على المحورين Ox وOy نجد:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \dots (1) \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -\mathrm{g} \dots (2) \end{cases}$$

بمكاملة المعادلتين السابقتين (1) و(2) ومن الشروط الابتدائية نجد:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \dots (3) \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -\mathrm{g}.\mathrm{t} + v_0 \sin\alpha \dots (4) \end{cases}$$

4. إيجاد معادلة المسار:

بمكاملة المعادلتين السابقتين (3) و(4) ومن الشروط الابتدائية نجد:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\,.t \dots (5) \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{g}.\mathrm{t}^2 + v_0 \sin\alpha\,.\mathrm{t} \dots (6) \end{cases}$$

نستخرج عبارة الزمن من المعادلة (5) ونعوضه في المعادلة (6)

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha . \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{g}{2.v_0{}^2.\cos^2\alpha}x^2 + x.\tan\alpha}$$

هي معادلة قطع مكافئ من الشكل: $\boxed{y = a.x^2 + b.x}$

5. أ- عبارة الطاقة:

- عبارة E_C بدلالة الزمن:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m({v_x}^2 + {v_y}^2)$$

$$\Rightarrow E_C = \frac{1}{2}m\left((v_0\cos\alpha)^2 + (-gt + v_0\sin\alpha)^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_C = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0\sin\alpha . t + \frac{1}{2}m{v_0}^2}$$

- عبارة E_{PP} بدلالة الزمن:

$$E_{PP} = mgh \Rightarrow E_{PP} = mg(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha . t)$$

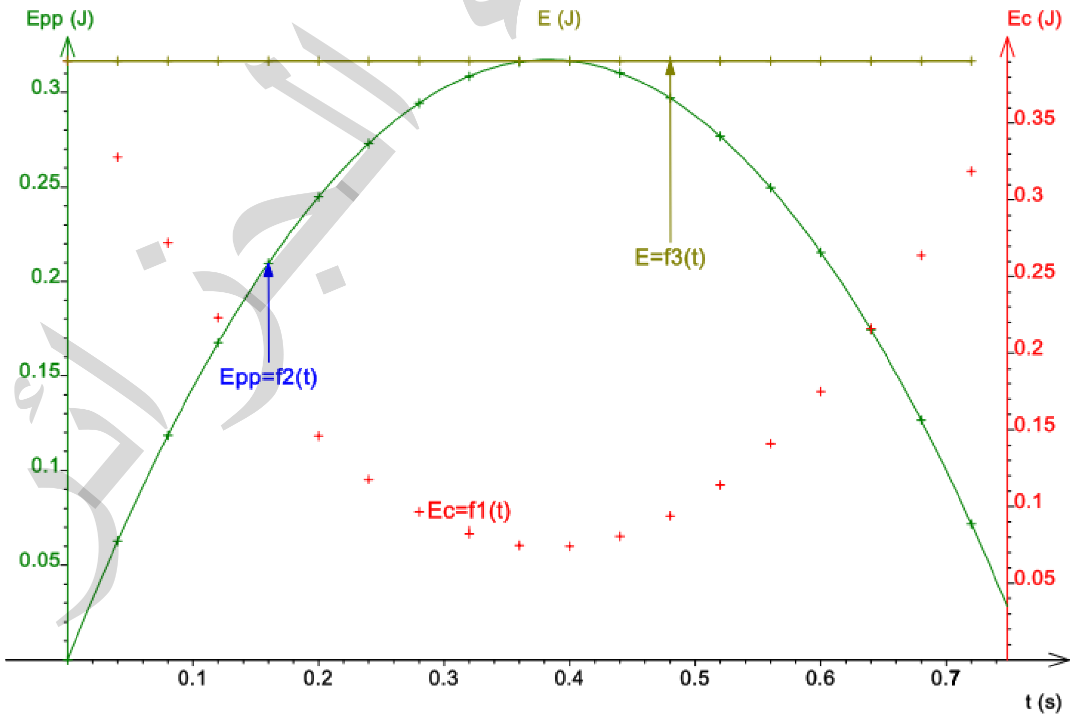
$$\Rightarrow \boxed{E_{PP} = -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0\sin\alpha . t}$$

- عبارة E بدلالة الزمن:

$$E = E_C + E_{PP} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mg^2t^2 - mgv_0\sin\alpha . t + \frac{1}{2}m{v_0}^2 - \frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0\sin\alpha . t$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}m{v_0}^2}$$

ب- رسم مخططات الطاقة:



ملاحظة: يتميز مسار القذيفة بنقطتين:

- **الذروة:** هي أعظم ارتفاع يبلغه الجسم الصلب. والتي يكون عندها شعاع السرعة أفقيا أي أنه يتحقق:

$$\boxed{v_y = \frac{dy}{dt} = 0}$$

t_s هو الزمن اللازم لبلوغ الدروة. يعطى بالعلاقة التالية:

$$v_y = -g.t_s + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}}$$

بالتعويض في المعادلة $y(t)$ نجد:

$$y_s = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha.\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

$$\Rightarrow y_s = -\frac{1}{2}g.\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha.\frac{v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow \boxed{y_s = \frac{v^2{}_0 \sin^2\alpha}{2g}}$$

- **المدى:** هو المسافة x_p بين نقطة القدف O ونقطة التصادم P على المستوى الأفقي.

مما سبق لدينا معادلة مسار الحركة:

$$y = -\frac{g}{2.v_0{}^2.\cos^2\alpha}x^2 + x.tan\,\alpha$$

حسب تعريف المدى لدينا:

$$x = x_P \rightarrow y = y_P = 0$$

بالتعويض في معادلة المسار نجد:

$$-\frac{g}{2.v_0{}^2.\cos^2\alpha}x_P{}^2 + x_P.tan\,\alpha = 0 \Rightarrow \frac{g}{2.v_0{}^2.\cos^2\alpha}x_P = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow x_P = \frac{2.v_0{}^2.\cos^2\alpha.\sin\alpha}{g.\cos\alpha} \Rightarrow x_P = \frac{2.v_0{}^2.\cos\alpha.\sin\alpha}{g}$$

ونعلم أن:

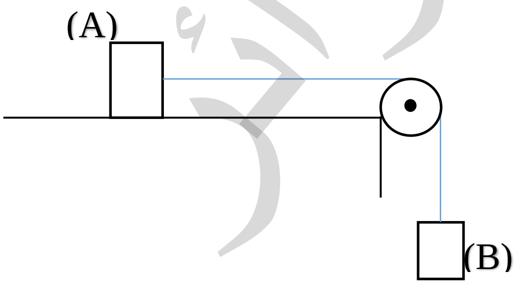
$$2.\cos\alpha.\sin\alpha = \sin 2\alpha$$

ومنه:

$$\boxed{x_P = \frac{v_0{}^2}{g}\sin 2\alpha}$$

2. حركة مركز عطالة جسم على مستوي أفقي:

نشاط:

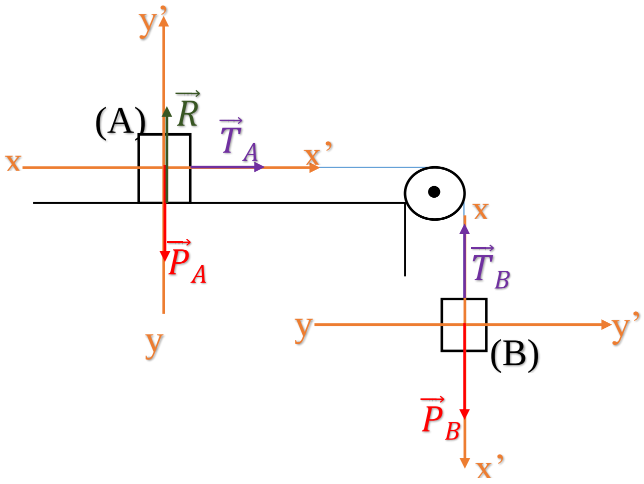


يتحرك جسم (A) كتلته m_1 ومركز عطالته G_1 ابتداءا من السكون على مستوي أفقي بتأثير السقوط الشاقولي لجسم (B) كتلته m_2 ومركز عطالته G_2. الجسمان مربوطان بخيط مهمل الكتلة غير قابل للامتطاط ويمر على بكرة ثابتة مهملة الكتلة بإمكانها الدوران دون احتكاك حول محور أفقي ثابت.

1. مثل القوى المؤثرة على الجسمين (A) و(B).
2. حدد مرجع الدراسة المختار.
3. ما طبيعة حركة الجسمين (A) و(B)؟

تحليل النشاط:

1. تمثيل القوى على الشكل:



2. تحديد مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليليا.
3. دراسة طبيعة الحركة:

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الجسم (A):

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\vec{P}_A + \vec{R} + \vec{T}_A = m_1.\vec{a}_1}$$

- بالعبارة الشعاعية على المحورين (xx') و(yy') نجد:

$$\begin{cases} T_A = m_1.a_{1x} \\ R - P_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{T_A = m_1.a} \ldots.(1) \\ \boxed{R - m_1.g = 0} \ldots.(2) \end{cases}$$

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الجسم (B):

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\vec{P}_B + \vec{T}_B = m_2.\vec{a}_2}$$

- بالعبارة الشعاعية على المحورين (xx') و(yy') نجد:

$$\begin{cases} P_B - T_B = m_2.a_{2x} \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P_B - T_B = m_2.a} \ldots.(3)$$

بما أن الخيط عديم الامتطاط فإن:

$$\boxed{T_A = T_B = T} \ldots.(4)$$

منه تصبح العبارتين (1) و(3) من الشكل:

$$\begin{cases} \boxed{T = m_1.a} \ldots.(5) \\ \boxed{P_B - T = m_2.a} \ldots.(6) \end{cases}$$

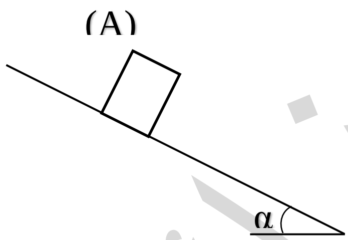
بتعويض العبارة (5) في (6) نجد:

$$P_B - m_1.a = m_2.a \Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2.g}{m_1 + m_2} = \text{ثابت}}$$

وعليه فإن حركة الجسمين حركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

3. حركة مركز عطالة جسم على مستوي مائل:

نشاط:

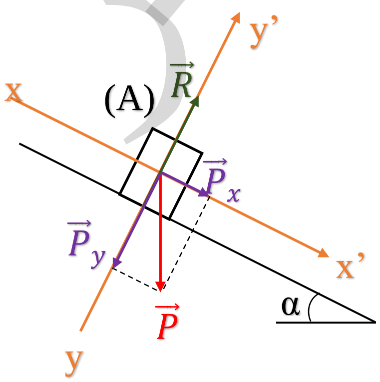


يتحرك جسم (A) كتلته m ومركز عطالته G ابتداءا من السكون على طول خط الميل الأعظم لمستوي مائل يصنع مع الأفق زاوية α. نفرض أن قوى الاحتكاك $\vec{f}$ تكافئ قوة ثابتة توازي المستوي وتعاكس جهة الحركة.

4. مثل القوى المؤثرة على الجسم (A).
5. حدد مرجع الدراسة المختار.
6. ما طبيعة حركة الجسم (A).

تحليل النشاط:

1. تمثيل القوى على الشكل:



2. تحديد مرجع الدراسة: سطحي أرضي نعتبره غاليليا.
3. دراسة طبيعة الحركة:

- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الجسم (A):

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}_G \Rightarrow \boxed{\vec{P} + \vec{R} + \vec{P} = m.\vec{a}}$$

- بالعبارة الشعاعية على المحورين (xx') و(yy') نجد:

$$\begin{cases} P_x - f = m.a_x \\ R - P_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P.\sin\alpha - f = m.a \\ R - P.\cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = \frac{P.\sin\alpha - f}{m} = \text{g}.\sin\alpha - \frac{f}{m} \Rightarrow \boxed{a = \text{g}.\sin\alpha - \frac{f}{m}}$$

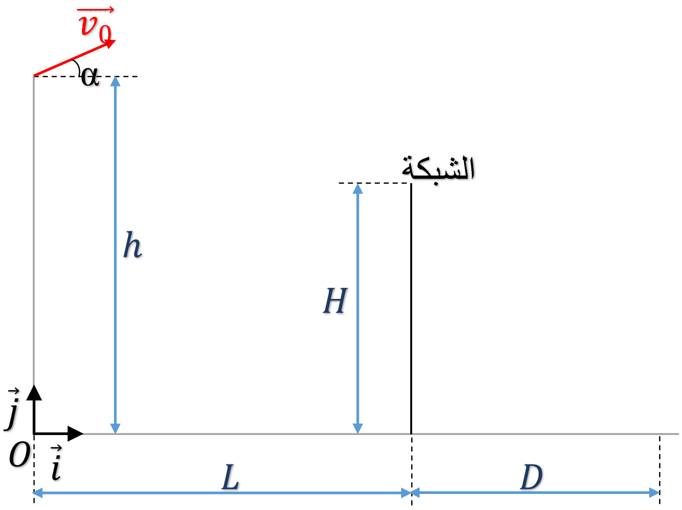
في غياب الاحتكاكات، تكون عبارة التسارع كما يلي:

$$\boxed{a = \text{g}.\sin\alpha}$$

وعليه الحركة مستقيمة متغيرة بانتظام.

4. تطبيقات:

تطبيق 01:



في كل التمرين، نعتبر الكرة نقطة مادية.

نأخذ: $\text{g} = 10\ m.s^{-2}$.

في الكرة الطائرة يضرب اللاعب الذي يقوم بإنجاز الإرسال الكرة على ارتفاع h من الأرض وعلى بعد مسافة L من الشبكة التي يبلغ ارتفاعها $H = 2{,}43\ m$. يوجد الخط الخلفي لمعسكر الفريق الخصم على بعد $D = 9\ m$ من الشبكة.

حتى يكون الإرسال صحيحا، يجب أن تمر الكرة فوق الشبكة وتلمس الأرض في معسكر الفريق الخصم بين الشبكة والخط الخلفي. للتبسيط نعتبر أن مسار الكرة يقع في مستوي الشكل ونهمل مقاومة الهواء في هذا التمرين، سنقوم بدراسة الإرسال. لإنجاز الإرسال يقفز اللاعب شاقوليا ويضرب الكرة عند النقطة A التي من أجلها يكون $h = 3{,}5\ m$ و $L = 12\ m$. يصنع شعاع السرعة الابتدائية $\vec{v}_0$ للكرة مع المستوي الأفقي زاوية $\alpha = 7°$ نحو الأعلى وقيمتها $v_0 = 18\ m.s^{-1}$.

1. أدرس طبيعة الحركة وأوجد المعادلتين الوسيطيتين للمسار ثم استنتج معادلة مسار الكرة. نعتبر مبدأ الزمن هو لحظة ضرب الكرة عند النقطة A.
2. في أي لحظة تمر الكرة فوق الشبكة؟ ما هو ارتفاعها عندئذ؟
3. في أي لحظة تلمس الكرة الأرض إذا لم يتم استقبالها؟ وعلى أي بعد من O هي إذن موجودة؟ هل الإرسال جيد في هذه الشروط؟

تطبيق 02:

تتكون الجملة المبينة في الشكل من جسم صلب (S) كتلته $M=625g$ يمكنه الانزلاق دون احتكاك على مستوي مائل يصنع مع الأفق زاوية $\alpha=30°$. يتصل الجسم من جهة بنابض مهمل الكتلة مثبت عند النقطة O وثابت مرونته $k=25\ N/m$. يرتبط الجسم من الجهة الأخرى بخيط يمر على محز بكرة مهملة الكتلة وقابلة للدوران حول محورها الأفقي (Δ) دون احتكاك وينتهي الخيط بجسم (S_1) كتلته $m_1=125g$ الذي يتصل بدوره بجسم آخر (S_2) كتلته $m_2=500g$ بواسطة خيط آخر. الخيطان مهملا الكتلة وعديما الامتطاط. $(g=10\ m/s^2)$

1. عين استطالة النابض x_0 عندما تكون الجملة في حالة توازن.
2. في لحظة ما يُقطع النابض الذي يشد الجسم (S).
   أ. ماذا يحدث للجملة وفي أي اتجاه تتحرك؟
   ب. أدرس طبيعة حركة الجملة وأحسب تسارعها.
3. بعد مضي فترة من بداية الحركة ينقطع الخيط الرابط بين الجسمين (S_1) و(S_2). صف الحركة اللاحقة للجملة المؤلفة من الجسمين $(S+S_1)$. ثم أحسب تسارع الحركة.