**المجــال:** التطورات الرتيبة

**الوحدة الخامسة:** تطور جمـلة ميكانيـــكية

| المدة: 4سا | الموضوع: حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء |
|---|---|

## 1. قوة جذب الأرض:

يخضع الجسم الموجود بجوار الأرض إلى قوة الجاذبية $\vec{F}$ المطبقة من طرف الأرض على الجسم والتي يمكن مطابقتها مع قوة الثقل $\vec{P}$.

خصائصها:

- منحاها شاقولي.
- اتجاهها نحو الأسفل (نحو مركز الأرض).
- قيمتها تعطى بالعلاقة: $P = m.\mathrm{g}$

يمكن قياسها بجهاز يدعى "الربيعة".

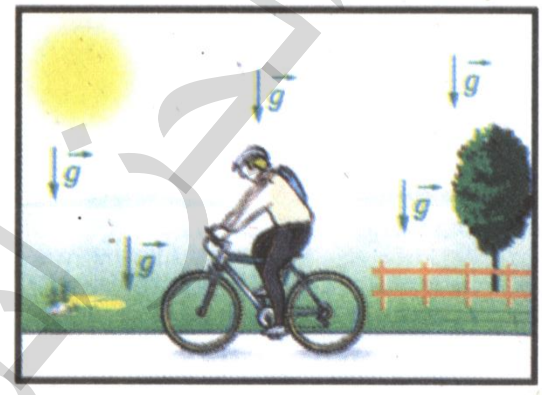
## 2. القوى المؤثرة على جسم صلب يسقط شاقوليا:

يخضع الجسم الصلب الذي يسقط شاقوليا في مائع (الهواء مثلا) إلى ثلاث قوى هي:

- ثقل الجسم $\vec{P}$: وهي قوة شاقولية موجهة نحو الأسفل قيمتها ثابتة خلال الزمن $P = m.\mathrm{g}$.
- دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$: يطبقها الهواء ذو الكتلة الحجمية على جسم حجمه مغمور كليا في الهواء $\pi = \rho_{air}.V.\mathrm{g}$
- قوة الاحتكاك الناتجة عن الهواء $\vec{f}$: قوة شاقولية، دائما موجهة في اتجاه معاكس للحركة، تتغير قيمتها أثناء الحركة لأنها تتعلق بسرعة الجسم.
  - إذا كانت قيم السرعة ضعيفة، فإن عبارة قوة الاحتكاك تعطى بالعلاقة: $\vec{f} = -k.\vec{v}$
  - إذا كانت قيم السرعة متوسطة، فإن عبارة قوة الاحتكاك تعطى بالعلاقة: $\vec{f} = -k.v^2.\vec{u}$

## 3. حقل الجاذبية المنتظم:

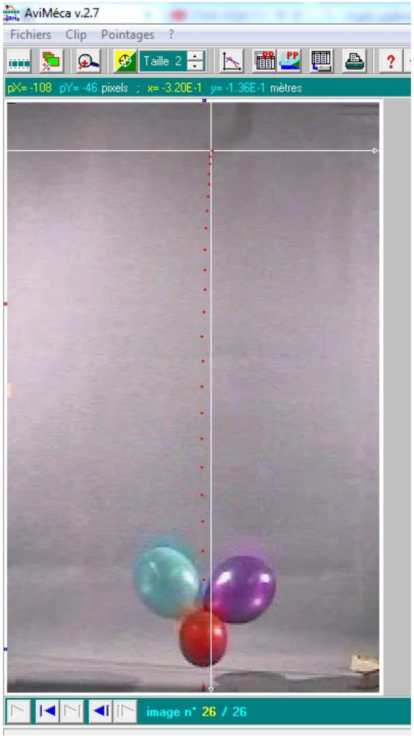
يكون شعاع حقل الجاذبية منتظما في منطقة من الفضاء إذا كان شعاع حقل الجاذبية $\vec{\mathrm{g}}$ هو نفسه (له نفس المنحى، نفس الاتجاه ونفس القيمة) في كل نقطة من هذه المنطقة.



## 4. حركة السقوط الشاقولي لجسم صلب في الهواء:

### نشاط:

نقوم بتسجيل حركة 4 بالونات معلقة بجسم، الكتلة الإجمالية $m = 20,6g$ تسقط من على ارتفاع، ثم نقوم بمعالجة الشريط بواسطة برنامج إعلام آلي مثل avimeca فنتحصل على النتائج التالية:




| t | y | Vy |
|---|---|---|
| s | m | m.s^-1 |
| 0 | 0 | |
| 0.04 | 0.0178 | 0.4813 |
| 0.08 | 0.0385 | 0.6275 |
| 0.12 | 0.068 | 0.7388 |
| 0.16 | 0.0976 | 0.8125 |
| 0.2 | 0.133 | 0.9675 |
| 0.24 | 0.175 | 1.15 |
| 0.28 | 0.225 | 1.4 |
| 0.32 | 0.287 | 1.513 |
| 0.36 | 0.346 | 1.438 |
| 0.4 | 0.402 | 1.513 |
| 0.44 | 0.467 | 1.7 |
| 0.48 | 0.538 | 1.775 |
| 0.52 | 0.609 | 1.812 |
| 0.56 | 0.683 | 1.888 |
| 0.6 | 0.76 | 1.887 |
| 0.64 | 0.834 | 1.962 |
| 0.68 | 0.917 | 2.038 |
| 0.72 | 0.997 | 1.913 |
| 0.76 | 1.07 | 2.037 |
| 0.8 | 1.16 | 2.125 |
| 0.84 | 1.24 | 2.125 |
| 0.88 | 1.33 | 2 |
| 0.92 | 1.4 | 2 |
| 0.96 | 1.49 | 1.875 |
| 1 | 1.55 | |

1. مثل المنحنى البياني الممثل لتغيرات سرعة البالونات بدلالة الزمن $v = f(t)$.
2. حدد مراحل حركة الكرة.
3. ما هي القوى المؤثرة على الكرة أثناء حركتها؟ مثلها على رسم.
4. باعتبار قوة الاحتكاك من الشكل: $\vec{f} = -k.\vec{v}$ حيث $k$ مقدار ثابت.

أ- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أوجد المعادلة التفاضلية للسرعة وضعها على الشكل: $\frac{dv}{dt} + B.v = A$

حيث $A$ و $B$ مقداران ثابتان.

ب- تأكد من أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $v = v_L.\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

5. ينمذج المنحنى $v = f(t)$ في برنامج Regressi وفق دالة أسية متزايدة.

أ- حدد ترتيبة نقطة تقاطع المستقيم المقارب الأفقي للمنحنى مع محور التراتيب. ماذا تمثل هذه الترتيبة؟

ب- حدد بيانيا قيمة $\tau$.

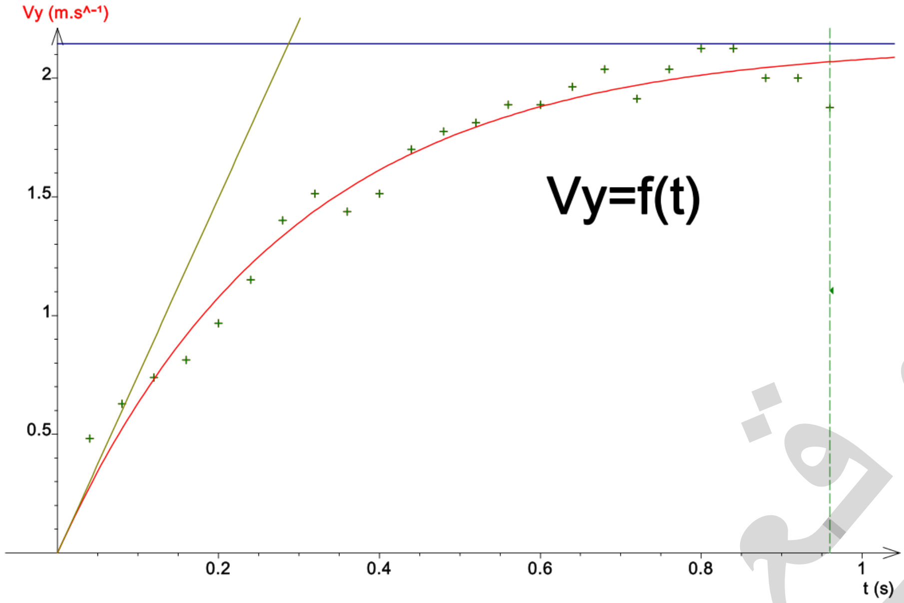
6. أحسب قيمة التسارع الابتدائي $a_0$ ثم استنتج شدة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.
7. أحسب قيمة $k$.
8. باعتبار الآن قوة الاحتكاك من الشكل: $\vec{f} = -k.v^2.\vec{u}$.

أ- أوجد المعادلة التفاضلية للسرعة.

ب- أوجد عبارة السرعة الحدية $v_L$.

**تحليل النشاط:**

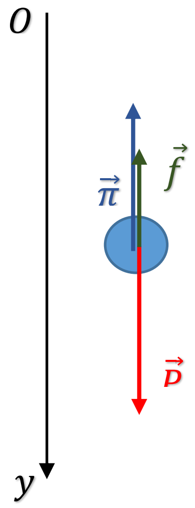
1. تمثيل المنحنى البياني $v = f(t)$:




2. تحديد مراحل الحركة:

نميز نظامين:

- **نظام انتقالي:** تزداد فيه السرعة بشكل سريع في البداية ثم أقل فأقل بمرور الزمن.
- **نظام دائم:** عندما تبلغ السرعة قيمة حدية $v_L$ تبقى ثابتة وتصبح حركة البالونات مستقيمة منتظمة.
- تحديد القوى المؤثرة على الجسم:




القوى المؤثرة هي:

- الثقل $\vec{P}$.
- دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$.
- قوى الاحتكاك $\vec{f}$.

3. أ- إيجاد المعادلة التفاضلية للسرعة:

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على مركز عطالة الجملة:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m.\vec{a}} \ldots (1)$$

نسقط العلاقة (1) على المحور $\overrightarrow{Oy}$ الموجه محور الحركة:

$$P - \pi - f = m.a \ \Rightarrow \ a = \frac{P - \pi - f}{m}$$

$$\Rightarrow \ a = g - \frac{\pi}{m} - \frac{k}{m}.v$$

ومن جهة أخرى لدينا:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

وبالتالي:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\pi}{m} - \frac{k}{m}.v \ \Rightarrow \ \boxed{\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}.v = g - \frac{\pi}{m}}} \ldots . (2)$$

المعادلة (2) هي من الشكل:

$$\boxed{\frac{dv}{dt}+B.v=A}$$

حيث: $\left.\begin{array}{r} A=g-\frac{\pi}{m} \\ B=\frac{k}{m} \end{array}\right\}$

في النظام الدائم تصبح حركة مركزعطالة الجملة مستقيمة منتظمة وعندها ينعدم التسارع وتبلغ السرعة قيمة حدية $v_L$.

$$B.v_L=A \Rightarrow v_L=\frac{A}{B}=\frac{m.\mathrm{g}-\pi}{k}$$

نعلم أن:

$$\pi=\rho_{air}.V.\mathrm{g}$$
$$m=\rho.\mathrm{V}$$

ومنه:

$$v_L=\frac{m.\mathrm{g}-\rho_{air}.V.\mathrm{g}}{k}=\frac{m.\mathrm{g}-\rho_{air}.\frac{m}{\rho}.\mathrm{g}}{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_L=\frac{m.\mathrm{g}}{k}\left(1-\frac{\rho_{air}}{\rho}\right)}$$

ب- تأكد من حل المعادلة التفاضلية:

- نشتق معادلة الحل بالنسبة للزمن نجد:

$$\frac{dv}{dt}=\frac{v_L}{\tau}.e^{-(t/\tau)}$$

- نعوض في المعادلة التفاضلية:

$$\frac{v_L}{\tau}.e^{-(t/\tau)}+Bv_L(1-e^{-(t/\tau)})=A$$
$$Bv_L.e^{-(t/\tau)}+Bv_L-Bv_Le^{-(t/\tau)}=A$$
$$\boxed{Bv_L=A}\ ...(3)$$

طرفي المعادلة متساويات إذن:

$$\boxed{v=v_L\left(1-e^{-(t/\tau)}\right)}$$

هو حل للمعادلة التفاضلية (2).

4. أ- تحديد نقطة تقاطع المستقيم المقارب الأفقي للمنحنى مع محور التراتيب:

من البيان: $\boxed{v=2{,}143\ m/s}$

وهي تمثل قيمة السرعة الحدية: $\boxed{v_L=2{,}143\ m/s}$

ب- تحديد قيمة $\tau$ من البيان: $\boxed{\tau=286{,}9\ ms}$

5. حساب قيمة التسارع الابتدائي $\vec{a}_0$ واستنتاج شدة دافعة أرخميدس $\vec{\pi}$:

نعلم أن:

$$a_0=\frac{v_L}{\tau}=\frac{2{,}143}{286{,}9}.10^3=7{,}47\ {}^{m}/_{s^2} \Rightarrow \boxed{a_0=7{,}47\ {}^{m}/_{s^2}}$$

عند اللحظة t=0 نعلم أن:

$$\left.\begin{array}{r} a=a_0 \\ v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f=0$$

ومنه:

$$m.\mathrm{g}-\pi=m.a_0 \Rightarrow \pi=m(\mathrm{g}-a_0)=20{,}6.10^{-3}.(9{,}8-7{,}47)=4{,}8.10^{-4}N$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = 4{,}8.10^{-4}N}$$

6. حساب قيمة $k$:

لدينا:

$$\tau = \frac{m}{k} \Rightarrow k = \frac{m}{\tau} = \frac{20{,}6.10^{-3}}{286{,}9.10^{-3}} = 7{,}2.10^{-2}\, {kg}/{s}$$

$$\boxed{\Rightarrow k = 7{,}2.10^{-2}\, {kg}/{s}}$$

7. أ- إيجاد المعادلة التفاضلية للسرعة في حالة $\vec{f} = -k.v^2.\vec{u}$:

$$P - \pi - f = m.a \Rightarrow m.g - \pi - k.v^2 = m.\frac{dv}{dt}$$

$$\boxed{g\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}\right) - \frac{k}{m}.v^2 = \frac{dv}{dt}}$$

ب- عبارة السرعة الحدية $v_L$:

يتم بلوغ السرعة الحدية عندما: $\frac{dv}{dt} = 0$

منه:

$$g\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}\right) - \frac{k}{m}.{v_L}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{{v_L}^2 = \sqrt{\frac{m.g\left(1 - \frac{\rho_{air}}{\rho}\right)}{k}}}$$

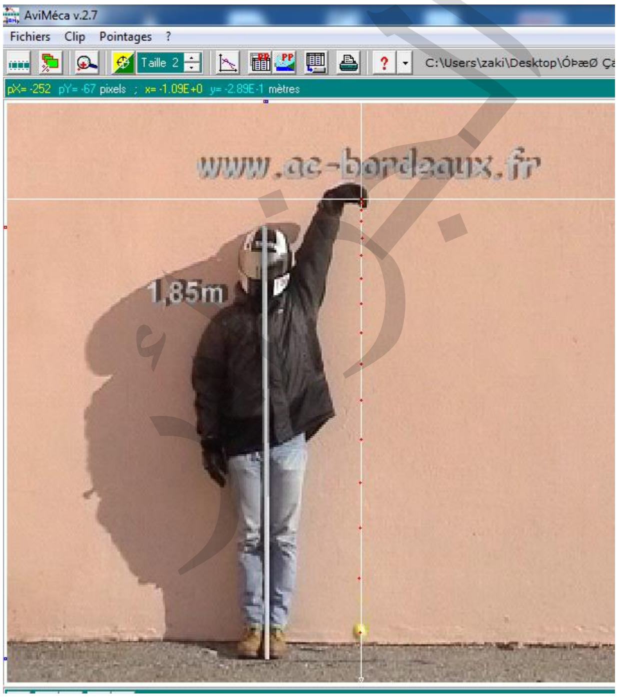
## 5. حركة السقوط الشاقولي الحر لجسم صلب في الهواء (السقوط الحر):

### تعريف السقوط الحر:

نقول عن جسم أنه يسقط سقوطا حرا عندما يكون خاضعا قوة ثقله فقط. ولا يتحقق هذا الشرط إلا عندما يسقط الجسم في الفراغ.

### نشاط:

بعد متابعة الحركة عن طريق برنامج الإعلام الآلي (avimeca) تحصلنا على الجدول التالي:



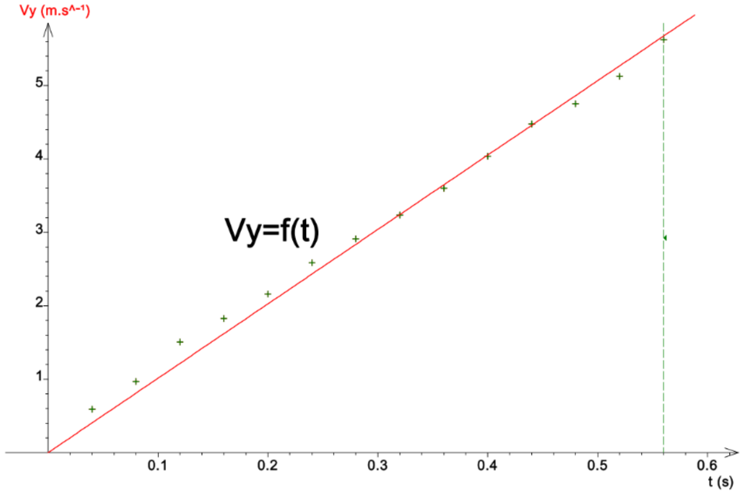

| t | y | Vy |
|---|---|---|
| s | m | m.s^-1 |
| 0 | 0 | |
| 0.04 | 0.0172 | 0.5925 |
| 0.08 | 0.0474 | 0.9713 |
| 0.12 | 0.0949 | 1.508 |
| 0.16 | 0.168 | 1.826 |
| 0.2 | 0.241 | 2.162 |
| 0.24 | 0.341 | 2.588 |
| 0.28 | 0.448 | 2.913 |
| 0.32 | 0.574 | 3.238 |
| 0.36 | 0.707 | 3.6 |
| 0.4 | 0.862 | 4.037 |
| 0.44 | 1.03 | 4.475 |
| 0.48 | 1.22 | 4.75 |
| 0.52 | 1.41 | 5.125 |
| 0.56 | 1.63 | 5.625 |
| 0.6 | 1.86 | |

1. مثل المنحنى البياني الممثل لتغيرات سرعة الكرة بدلالة الزمن $v = f(t)$. ما هي طبيعة حركة الكرة؟

2. مثل المنحنى البياني الممثل لتغيرات تسارع الحركة بدلالة الزمن $a = f(t)$، ناقش البيان.
3. مثل المنحنى البياني الممثل لتغيرات الفاصلة بدلالة الزمن $y = f(t)$، ناقش البيان.
4. أ- ما هو المرجع المستعمل لدراسة حركة الكرة؟ هل يمكن اعتباره مرجعا غاليليا؟ علل.
ب- مثل القوى المؤثرة على الكرة
5. بتطبيق القانون الثاني لنيوتن أدرس حركة مركز عطالة الكرة واستنتج قيمة تسارع الجاذبية الأرضية في مكان التجربة.
6. أوجد المعادلة التفاضلية للحركة.

**تحليل النشاط:**

1. تمثيل المنحنى البياني $v = f(t)$:

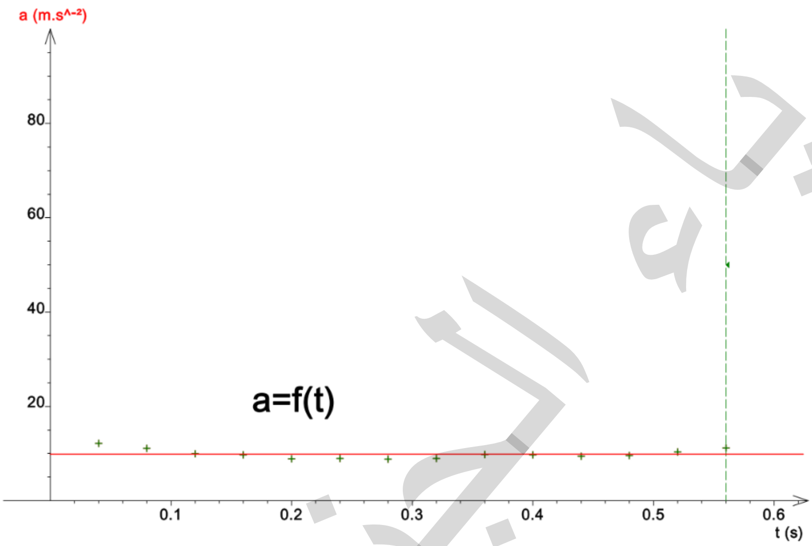



- البيان عبارة خط مستقيم يمر من المبدأ معادلته من الشكل:

$$\boxed{v_y = a.t}$$

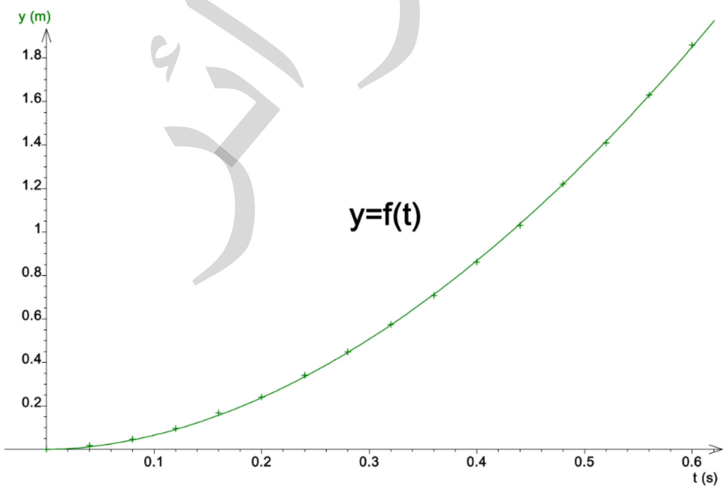
بحيث: $\boxed{a = g}$

2. تمثيل المنحنى البياني $a = f(t)$:




- البيان عبارة عن خط مستقيم موازي لمحور الزمن، ويقطع محور التراتيب في النقطة: $a \approx 10m/s^2$
- تسارع الحركة ثابت إذن حركة مركز عطالة الكرة حركة مستقيمة متغيرة بانتظام.
- بما أن تسارع الحركة موجب والسرعة موجبة إذن الحركة مستقيمة متسارعة بانتظام.

3. تمثيل المنحنى البياني $y = f(t)$:




- البيان عبارة عن نصف قطع مكافئ.
- إيجاد عبارته الرياضية:

نعلم أن:

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \boxed{dy = v_y.dt}$$

ومن جهة أخرى لدينا: $v_y = g.t$

منه:

$$\boxed{dy = g.t.dt} \quad ....(*)$$

بمكاملة طرفي المعادلة (*):

$$\int dy = g.\int t.dt$$

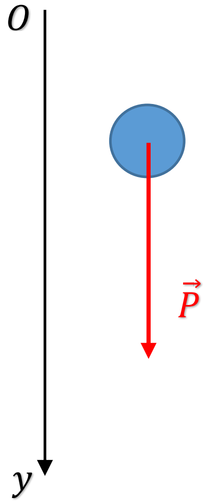
ومنه:

$$\boxed{y = \frac{1}{2}g.t^2 + y_0}$$

حيث $y_0$ مقدار ثابت يحدد من الشروط الابتدائية.

$$t = 0 \rightarrow y = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}g.t^2}$$

4. المرجع المختار لدراسة الحركة هو المرجع السطحي الأرضي وحقل الجاذبية فيه ثابتا في منطقة الحركة.
بما أن مدة التجربة قصيرة جدا فنعتبر هذا المرجع غاليليا خلال مدة التجربة.




- تخضع الكرة أثناء سقوطها لقوة ثقلها فقط

5. <u>دراسة حركة مركز عاطلة الكرة:</u>
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} \Rightarrow \vec{P} = m.\vec{a}$$
$$\Rightarrow m.\vec{g} = m.\vec{a}$$
$$\Rightarrow \vec{g} = \vec{a} \ldots.(*)$$

نسقط العلاقة (*) على محور الحركة (OY): $\boxed{g = a}$

6. <u>المعادلة التفاضلية للحركة:</u>

$$\boxed{\frac{dv_y}{dt} = g}$$